Fonction génératrice d'une v a entière

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $X : \Omega \to \mathbb{N}$ de loi $P(X=n) = p_n$

Déf : la fonction génératrice de X est la fonction déf sur $[0,1]$ par

$$g : s \longmapsto E(s^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, s^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n s^n$$

$$\left(s \in [0,1] \Rightarrow p_n s^n \leq \underbrace{p_n}_{\text{t.g d'une séri CV}} \quad \text{donc } g \text{ est bien déf} \right)$$

Prop : g est C^0 sur $[0,1]$ et C^∞ sur $[0,1[$

Elle caractérise la loi de X.

dém : g est la somme d'une série entière qui CV absolument en 1
(rayon de CV ≥ 1)

Les propriétés de continuité et différentiabilité en découlent

(CV normale sur $[0,a]$, $\forall a \in [0,1[$ on peut dériver terme à terme etc)

En particulier, $$g'(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n p_n s^{n-1}$$

$$g^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{+\infty} \underbrace{n(n-1)\ldots(n-k+1)}_{\frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}} p_n s^{n-k}$$

donc $g^{(k)}(0) = k!\, p_k$ donc g caractérise $(p_n)_{n\geq 0}$, i.e., la loi de X

∎

Prop. Pour que X soit intégrable ($E(|X|) < +\infty$), il faut et il suffit que g soit dérivable à gauche en 1, et alors

$$E(X) = g'(1)$$

dém. Si $(s \longmapsto u_n(s))_{n \geq 0}$ sont des fonctions croissantes sur $[0,1[$, positives, alors

$$\lim_{s \nearrow 1} \sum_n u_n(s) = \sum_n \lim_{s \nearrow 1} u_n(s) \quad (\star) \quad \text{(on peut échanger les lim)}$$

$\forall\ s < 1,$

$$\frac{g(s) - g(1)}{s-1} = \sum_n p_n \frac{s^n - 1}{s-1} = \sum_n \underbrace{p_n (1 + s + \cdots + s^{n-1})}_{u_n(s)}$$

$(u_n)_n$ fct $\nearrow$ ≥ 0 sur $[0,1[$,

si g dér en 1^-

$$(\star) \Longrightarrow \lim_{s \nearrow 1} \frac{g(s) - 1}{s-1} = g'(1) = \sum_n p_n n = E(X) \quad \blacksquare$$

$\lim_{s \nearrow 1} u_n(s)$

Plus généralement, $X(X-1)\,.\,(X-p)$ est intégrable

$\Longleftrightarrow$ g est $(p+1)$ fois dér en 1^-, et alors

$$E\left(X(X-1)\dots(X-p)\right) = g^{(p+1)}(1)$$

Exemples.

1) Loi de Poisson.

X v.a. entière tq $p_n = P(X=n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$

$$g(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n s^n = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}s^n = e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda s)^n}{n!}}_{e^{\lambda s}}$$

$$\rightsquigarrow \quad g(s) = e^{\lambda(s-1)}, \quad \forall s\in[0,1].$$

En dérivant, $g'(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)}$

$$g'(1) = \lambda = E(X)$$

En dérivant 2 fois, $g''(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}$

$$\lambda^2 = g''(1) = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X) = E(X^2) - \lambda$$

$$\Rightarrow \quad V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda$$

2) Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

X va de loi $\mathcal{B}(n,p)$. $\quad p_k = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$

$$g(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k s^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ps)^k (1-p)^{n-k} = (ps + (1-p))^n.$$

$$g'(s) = pn\left(ps + (1-p)\right)^{n-1}$$

$$g'(1) = pn = E(X)$$

$$g''(s) = p^2 n(n-1)\left(ps + (1-p)\right)^{n-2}$$

$$g''(1) = p^2 n(n-1) = E(X^2) - E(X) = E(X^2) - pn$$

$$\Rightarrow V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \cancel{p^2n^2} - p^2 n + pn - \cancel{(pn)^2} = pn(1-p)$$

3) Loi géométrique.

X va de loi géom de param $a > 0$. $P(X = n) = (1-a)a^n,\ n \geq 0.$

$$g(s) = \frac{1-a}{1-as}$$

(exo)

Indépendance de v.a. et fonctions génératrices

Ω fini ou dénombrable, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace proba, X, Y v.a. sur Ω

$X : \Omega \to E$, $Y : \Omega \to F$

Ici on supposera $E = F = \mathbb{N}$

Déf. X, Y sont **indépendantes** si $\forall A, B \subset \mathbb{N}$,

$$P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

Prop. Il y a équivalence entre

(i) X, Y indép

(ii) $P_Z(i,j) = P_X(i) P_Y(j) \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, avec $Z = (X, Y)$

(iii) $P(Y = j \mid X = i) = P_Y(j)$, $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$ tq $P(X = i) > 0$

dém. • $(i) \Rightarrow (ii)$

$A = \{i\}$ et $B = \{j\}$ dans la déf de l'ind de X et Y, on a.

$$\underbrace{P(X = i \text{ et } Y = j)}_{p_Z(i,j)} = P(X \in A)\, P(Y \in B) = p_X(i)\, p_Y(j)$$

• (ii) $\forall A \subset \mathbb{N}$, $B \subset \mathbb{N}$,

$$P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(Z \in A \times B) = \sum_{\substack{i \in A \\ j \in B}} \overbrace{P((X,Y) = (i,j))}^{p_X(i)\, p_Y(j) \text{ par } (ii)}$$

$$= \underbrace{\sum_{i \in A} P(X = i)}_{P(X \in A)} \underbrace{\sum_{j \in B} P(Y = j)}_{P(Y \in B)} \quad \text{d'où } i)$$

Et $(ii) \Leftarrow (iii)$ clair

$\blacksquare$

Prop. : Supposons que X, Y sont indépendants, et soit f, g deux fonctions réelles de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $\overbrace{f(X)}^{\text{v.a.}}$, $\overbrace{g(Y)}^{\text{v.a}}$ sont intégrables ($E(|f(X)|), E(|g(Y)|) < \infty$)

Alors $f(X)g(Y)$ est intégrable, et

$$E(f(X)g(Y)) = E(f(X))\, E(g(Y))$$

dém : $$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |f(i)g(j)| \underbrace{P_Z(i,j)}_{P_X(i)P_Y(j) \text{ par indép}} = \sum_{(i,j)} |f(i)|P_X(i) \cdot |g(j)|P_Y(j)$$

$$= \left(\sum_i |f(i)|\,P_X(i)\right)\left(\sum_j |g(j)|\,P_Y(j)\right) = \underbrace{E(|f(X)|)}_{<+\infty}\ \underbrace{E(|g(Y)|)}_{<+\infty}$$

$\Longrightarrow$ $f(X)\,g(Y)$ est int. et de même (on enlève $|\cdot|$), on a

$$E\big(f(X)g(Y)\big) = E\big(f(X)\big)\,E\big(g(Y)\big) \qquad \blacksquare$$

Prop Soit X, Y 2 va à valeurs entières ($\mathbb{Z}$)

Soit $U = X + Y$. Alors

$$P(\underset{\underset{\mathbb{Z}}{\uparrow}}{U = i}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_Z(j, i-j) \quad \text{pour } Z = (X, Y)$$

En particulier, si X, Y sont indép,

$$P(U = i) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_X(j)\,P_Y(i-j)$$

dém ex. $\blacksquare$

Prop. Supposons que X, Y sont **indép**, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si $U = X + Y$, et g_X, g_Y, g_U sont les fonctions génératrices de X, Y, U, alors

$$g_U = g_X \, g_Y$$

dém.

$$g_U(s) = \sum_i \underbrace{P(U = i)}_{\sum_j P(X=j)\, P(Y=i-j)} \; s^i$$

par indép

$s^j s^{i-j}$

changement d'indice $k = i-j$

$$= \sum_j P(X=j)\, s^j \sum_i P(Y = i-j)\, s^{i-j}$$

$$= \underbrace{\sum_j P(X=j)\, s^j}_{g_X(s)} \; \underbrace{\sum_k P(Y=k)\, s^k}_{g_Y(s)}$$

Alternativement, on peut remarquer que

$$g_U(s) = E(s^U) = E(s^{X+Y}) = E(\underbrace{s^X}_{f(X)} \underbrace{s^Y}_{g(Y)}) \overset{\text{par la prop ci-dessus}}{=} E(f(X))\, E(g(Y))$$

$$= E(s^X)\, E(s^Y)$$

$$= g_X(s)\, g_Y(s) \quad \blacksquare$$

Exemples.

1) X, Y v a indép de lois resp $\mathcal{B}(n,p)$, $\mathcal{B}(m,p)$

$\rightsquigarrow U = X+Y$. $\quad g_U(s) = \underbrace{g_X(s)}_{} \underbrace{g_Y(s)}_{} = (ps + (1-p))^{m+n}$

$= (ps+(1-p))^n \quad (ps+(1-p))^m$

par ce qu'on a vu plus haut

Comme g_U caractérise la loi, et que g_U = fonction gén d'une loi $\mathcal{B}(m+n,p)$, on conclut que U suit une loi binomiale $\mathcal{B}(m+n, p)$

2) X, Y v a indép de lois de Poisson de param λ, μ

Alors on a pour $U = X + Y$. $\quad g_U(s) = \underbrace{g_X(s)}_{e^{\lambda(s-1)}} \underbrace{g_Y(s)}_{e^{\mu(s-1)}}$

d'après ci-dessus

$$\Rightarrow g_U(s) = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$$

donc U suit une loi de Poisson de param $\lambda+\mu$

$$\left(P(U = n) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} \right)$$

Déf. Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont **indépendantes** si pour toutes parties $A_1, \ldots, A_n$ on a

$$P\left(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(X_k \in A_k\right).$$

Remarque. C'est vrai si et seulement si pour $Z = (X_1, \ldots, X_n)$, on a

$$\underbrace{P\left(Z = (i_1, \ldots, i_n)\right)}_{P_Z(i_1, \ldots, i_n)} = \prod_{k=1}^{n} \underbrace{P_{X_k}(i_k)}_{P(X_k = i_k)}$$

Déf. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a. est dite **indépendante** si pour toute partie finie $I \subset \mathbb{N}$, $(X_i)_{i \in I}$ sont indépendantes.